

一种减小 ADI- FDTD 误差的方法

任寰弋, 童 玲

(电子科技大学自动化学院, 四川 成都 610054)

摘 要: 普通的 FDTD 法解的过程必须满足时间稳定性条件(Courant- Friedrich- Levy stability condition CFL)。当要模拟的问题具有微细结构时, 由于空间步长必须足够小, 相应的时间步长也需取得很小, 这将使计算开销变得十分巨大。为了解决这个问题, 人们提出了无条件稳定的基于交变隐式差分方向方法的时域有限差分法——ADI- FDTD 方法。然而, 当时间步长取得较大的话, 也会伴随着较大的误差。在 Crank- Nicolson FDTD 方法的基础上, 给出了两个新的 ADI- FDTD 方法, 相对于之前的 ADI- FDTD 方法在大时间步长的情况下, 减小了误差。

关键词: 交变隐式差分; 时域有限差分; 时间稳定条件; 误差

中图分类号: TP311.11, TP391.1

文献标识码: A

文章编号: 1672- 4984(2007)04- 0102- 03

A method to reduce error of ADI- FDTD

REN Huan-yi, TONG Ling

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology, Chengdu 610054, China)

Abstract: As explicit finite- difference time- domain (FDTD) methods must satisfy the Courant- Friedrich- Levy stability condition (CFL) stability condition, this makes computationally expensive when simulating the problem that has slightly constructs that small cell sizes and time steps are needed. To overcome the problem, unconditionally stable alternate- direction implicit (ADI) FDTD method has been recently proposed. However, it comes with large errors when time steps selected large. In this paper, the authors proposed two new ADI- FDTD method with reduced errors at large time steps, based on the Crank- Nicolson FDTD methods.

Key words: ADI- FDTD; Courant- friedrich- levy; Stability condition; Error

1 引 言

时域有限差分法(Finite- Difference Time- Domain- FDTD) 以 Yee 氏立体网格作为电磁场离散单元, 将麦克斯韦方程转化为差分方程, 能够方便有效的结合计算机技术处理复杂的电磁场问题^[1], 目前已经在电磁学的各个领域得到了广泛的应用。然而其计算效率却受 Courant- Friedrich- Levy(CFL) 稳定条件的限制, 尤其体现在高 Q 值结构和场变化非常迅速的结构的地方。为了克服这个限制, 人们提出了无条件稳定的基于交变隐式差分方向方法的时域有限差分法——ADI- FDTD 方法和 Crank- Nicolson (CN) FDTD 方法^[2-5]。由于它们的无条件稳定性, 两种方法都引起了不少关注。在研究中, 人们发现, 虽然这两种方法计算效率提高了不少, 但当时间步长取得较大的话, ADI- FDTD 方法也会伴随着较大的误差。另一方面, CN- FDTD 方法虽然在大时间步长下要精确

一些, 但却是以更多的计算时间作为代价换来的。

针对 ADI- FDTD 方法存在较大的数值色散误差的问题, 国内外许多专家学者都进行了研究。比较常见的有两种方案: 一种方法是采用高阶差分。普通的 ADI- FDTD 方法在空间上取的是二阶近似, 为了进一步提高计算精度, 可将 Maxwell 方程的空间近似式取四阶有限差分。文献[11]中已详细论证了采用这种高阶差分迭代式仍然是无条件稳定的, 而数值色散比二阶差分算法显著减小。不过这种方法的缺点是增加了计算的复杂性。另一种方法是在运算空间增加各向异性介质控制数值色散, 减小误差。实际计算表明, 采用该方法并选取适当的介电常数, 即可改善 ADI- FDTD 相速特性, 很大程度上消除其色散现象。但其存在着有待进一步研究的问题: 如何处理在消除某段频率范围色散误差时出现的低频部分误差增加的情况, 以及怎样在计算空间中自由地控制更宽频带范围的相速, 令其同时接近相速理想值。

本文有别于以上两种方法, 提出了另一种基于 CN- FDTD 公式的 ADI- FDTD 方法, 它能提高计算的精

收稿日期: 2006- 12- 07; 收到修改稿日期: 2007- 02- 03

作者简介: 任寰弋(1982-), 男, 硕士研究生, 主要从事电磁场微波、平面传输线非理想情况分析。

度, 却具有和常规 ADI-FDTD 同样的计算效率。虽然提高之后的精度仍无法达到 CN-FDTD 的水平, 但也足够满足大多数大时间步长的仿真而不用增加计算开销。

2 理论分析

2.1 公式变换

首先, 将 Maxwell 方程组表示为矩阵的形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{\epsilon} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\rho}{\mu} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\rho}{\mu} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{定义 } U = [E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z]^T \quad (2)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{\epsilon} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\rho}{\mu} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\rho}{\mu} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\mu} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{则 1) 式可表示为: } \frac{\partial U}{\partial t} [C] U \quad (4)$$

把 [C] 分解为 [A]、[B] 两个部分:

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{2\epsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\sigma}{2\epsilon} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2\epsilon} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\rho}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\rho}{2\mu} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{2\mu} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{2\epsilon} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{2\epsilon} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2\epsilon} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\rho}{2\mu} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{2\mu} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{2\mu} \end{bmatrix} \quad (6)$$

则

$$[C] = [A] + [B] \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [A]U + [B]U \quad (8)$$

对 8) 式在时间上进行中心差分:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \{[A] + [B]\} \times \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \quad (9)$$

(9) 式可变形为:

$$\begin{aligned} \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+1} &= \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \\ \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^n + \frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (U^{n+1} - U^n) \end{aligned} \quad (10)$$

在计算 10) 式的时候, 我们可类似于 ADI-FDTD 方法, 采用两个步骤:

$$\begin{aligned} \text{第一步: } \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+\frac{1}{2}} &= \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) U^n + \\ &\frac{\Delta t^2}{8} [A][B] (U^{n+1} - U^n) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{第二步: } \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+1} &= \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+\frac{1}{2}} + \\ &\frac{\Delta t^2}{8} [A][B] (U^{n+1} - U^n) \end{aligned} \quad (12)$$

2.2 方法推导

上面的两个方程都是隐式方程, 一般是采用迭代的方法来求解。本文提出了另两种方法, 这两种方法在方程的右边是显式的, 不需要在每一个时间步上进行迭代。

方法一: 对于上面 10) 式中右边 $\frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (U^{n+1} - U^n)$ 中的 U , 我们用 $U^n = \frac{U^{n+\frac{1}{2}} + U^{n-\frac{1}{2}}}{2}$ 和 $U^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}$ 来近似, 可得到以下两个步骤:

$$\begin{aligned} \text{第一步: } \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+\frac{1}{2}} &= \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) U^n + \\ &\frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (U^n - U^{n-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{第二步: } \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [B] \right) U^{n+1} &= \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+\frac{1}{2}} + \\ &\frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (U^{n+\frac{1}{2}} - U^n) \end{aligned} \quad (14)$$

方法二: 对于上面 10) 式中右边 $\frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (U^{n+1} - U^n)$ 中的 U , 我们用 $U^n = \frac{U^{n+1} + U^{n-1}}{2}$ 来近似, 可得到以下两个步骤:

$$\text{第一步: } \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+\frac{1}{2}} = \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) U^n + \frac{\Delta t^2}{8} [A][B] (U^n - U^{n+1}) \quad (15)$$

$$\text{第二步: } \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [B] \right) U^{n+1} = \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) U^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8} [A][B] (U^{n+\frac{1}{2}} - U^{n+1}) \quad (16)$$

上面这些方程与传统的 ADI-FDTD 方程有所不同, 在方程的右边多出了和 Δt 相关的二次项, 多出的这部分和截断误差有关, 增加了这部分, 有助于减小大时间步长带来的误差。

3 数值计算结果

出于完整性, 上文分析了三维包含了电流源和有耗介质情况下的公式。为了简单的说明问题, 这里考虑二维不包含电流源并且是无耗介质的情况: 如图 1, 在四周都是 PMC 包围的自由空间中, 有两个平行导电板, y 方向相距 0.2m, 板宽均为 2m, 平行板位于自由空间的中部, 被 PMC 包围的自由空间的大小为 x 方向 10m, y 方向 4m, 采用 750kHz 正弦源, 在 $x=7m, y=3.1m$ 处, 根据不同的 CFL 参数 (用 s 来表示, $s = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta}$, Δ 为网格宽度) 考察 E_y 。这里定义 E_y 的

相对误差为: $\frac{E_y^m - E_y^r}{E_y^r}$, 其中 E_y^m 表示在考察点处由上面公式得到的 E_y 值; E_y^r 表示在考察点由普通 FDTD

方法, 在网格划分足够小的情况下, 得到的 E_y 的

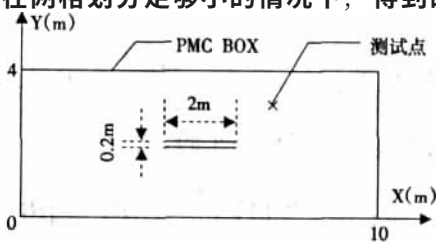


图 1 被 PMC 封闭的自由空间中的平行导电金属板

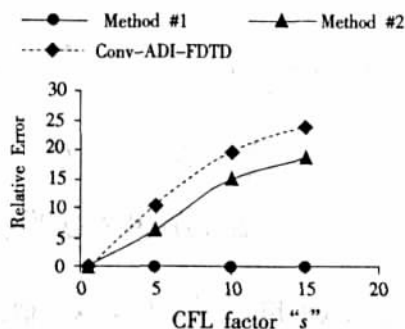


图 2 关于 CFL 参数“s”的相对误差

值。

图 2 表示出了关于不同 CFL 参数“s”的上述两种方法的相对误差, 为了便于比较, 图中还画出了传统 ADI-FDTD 关于“s”的相对误差。我们可以看出, 当“s”小于 0.5 的时候, 三种方法的相对误差都很小, 和 FDTD 差不多。但是当“s”增大的时候, 传统 ADI-FDTD 和第二种方法的相对误差都开始增大, 但是第二种方法明显要小于传统 ADI-FDTD, 而第一种方法的相对误差却仍然和 FDTD 一样, 没有增大。

另外, 从以上两种方法和传统 ADI-FDTD 的表达式可以看出, 他们的计算时间和内存占用应该是基本一致的, 而本文提出的两种方法, 尤其是第一种方法计算的误差明显小于传统 ADI-FDTD, 这无疑增加了 ADI-FDTD 方法的计算精度, 扩展了其应用的范围。

4 结论

为保证计算的准确高效性, ADI-FDTD 必须在原有的无条件稳定、计算时间短等优点的基础上进行发展, 尽量减少内存使用量, 简化计算的复杂性, 并控制其数值色散。在本文中, 提出了两个减小 ADI-FDTD 误差的计算方法。数值计算结果证明了它们在保持和传统 ADI-FDTD 方法相同计算效率的同时, 达到了与 CN-FDTD 方法相似的计算精度。尤其是文中的第一种方法, 在大时间步长时, 仍然保持与传统 FDTD 相同的计算精度, 大大提高了 ADI-FDTD 方法的实用意义。本文提出的方法奠定了进一步研究 ADI-FDTD 误差的基础, 对为何这两种方法减小了误差, 还有待进一步的理论研究。

参考文献

- [1] 王秉中. 计算电磁学[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] Naniki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. IEEE Trans. Microw., 1999, 47(10): 2003-2007.
- [3] Zheng F, Chen Z and Zhang J. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain method[J]. IEEE Trans. Microw. Theory Tech., 2000, 48(9): 1550-1558.
- [4] Garcia S G, Lee T W and Hagness S C. On the accuracy of the ADI-FDTD method [J]. IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., 2002, 1: 31-34.
- [5] Sun G and Trueman C W. Approximate crank-nicolson schemes for the 2-D finite difference time domain method for TEz waves [J]. IEEE Trans. Antennas Propag., 2004, 52(11): 2963-2972. (下转第 128 页)

根据图 3 来说明一下电流互感器的用法。在这里我们选择 DC10EA 型的电流互感器, 额定输入电流为 10mA, 输出电压为 0- +/- 2.5V。当出现正绝缘降低时, 正母线和负母线上的电流差值为 I_2 (单位为 mA), 则此时电流互感器的输出 $U = (I_2/10) * 2.5$ (V), 当出现负绝缘降低, 此时电流互感器的输出 $U = -(I_2/10) * 2.5$ (V)。我们通过采集电流互感器的输出电压, 便可以计算漏电流 I_2 的大小, 从而得到绝缘降低的程度。

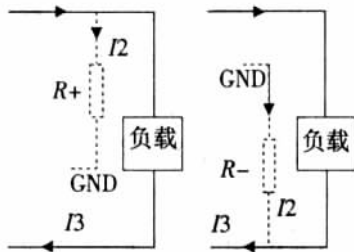


图 3 电流互感器用法示意图

因为当出现正负绝缘都降低的时候, 绝缘降低的程度与漏电流不成正比。所以我们采用前面讲到的不平衡电桥来计算主回路的绝缘电阻的具体大小。如果到了报警线, 便通过通讯向支路绝缘检测模块获取各个支路绝缘降低的程度。图 4 给出了支路绝缘检测模块的大致原理图。单片机通过多路开关将不同支路的电流互感器的输出电压采集进来。在绝缘主模块需要的时候将采集的数据发给主模块。

4 结束语

本文利用不平衡电桥法给出了一个较为精确的计算正负绝缘都出现降低的情况下的正、负绝缘电阻, 同时提出了一种主-从式的绝缘监测小系统。该

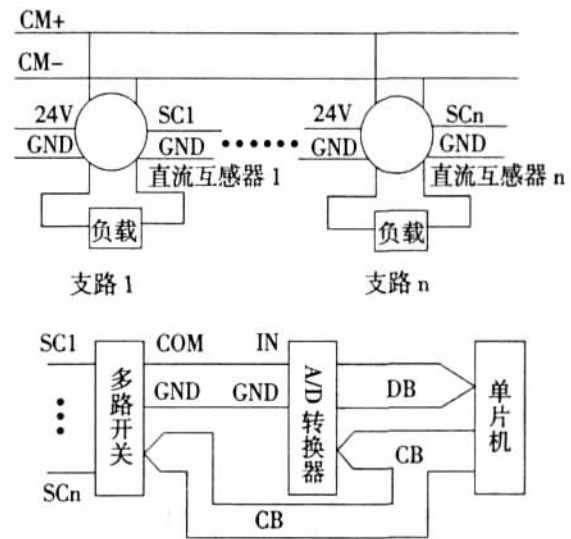


图 4 支路绝缘检测模块原理图

系统在实际应用中取得了良好的效果。

参考文献

- [1] 刘君怀, 陈怡欢. 直流绝缘监测的应用与发展[J]. 高压电器, 2000, 36(6): 47-49.
- [2] 李红梅, 张贺伟, 等. 直流系统接地检测问题分析及改进[J]. 电力情报, 2002, 3: 61-63.
- [3] 贾秀芳, 赵成勇, 李黎. 直流系统绝缘检测综合判据[J]. 电力系统自动化, 1999, 23(16): 23-25.
- [4] 孙涵芳. Intel 16 位单片机[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2002.
- [5] 汪根华, 尹斌. 直流绝缘检测的研究与应用[J]. 微计算机信息, 2003, 12: 38-39.
- [6] 崔实, 张连斌, 霍刚. 变频在线型直流监测装置的研究[J]. 华北电力技术, 1997, 9(11): 26-28.

(上接第 104 页)

- [6] Wang S, Teixeira F L and Chen J. An iterative ADI-FDTD with reduced splitting error [J]. IEEE Microw. Compon. Lett., 2005, 15(2): 92-94.
- [7] Namiki T. 3-D ADI-FDTD method unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwells equations [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(10): 1743-1748.
- [8] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1999, 47(10): 2003-2007.
- [9] Kordylis G D, Flaviis F D, Pottie G J and Itoh T. A memory-efficient fomulation of the finite-difference

time-domain method for the solution of Maxwell equation [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2001, 49(7): 1310-1320.

- [10] Chen Zhi-zhang, Ifibar Abmed. A hybrid ADI-FDTD scheme and its comparisons with the FDTD method[S]. IEEE Antennas and Propagation Society, AP-S International Symposium (Digest), 2003, 4: 360-363.
- [11] Zheng Feng-hua, Chen Zhi-zhang, and Zhang Jia-zong. Development of three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain methods [S]. IEEE MIT-S International Microwave Symposium Digest, 2000, 2: 1117-1120.