



# 振动系统 PID 零极点配置理论

王 见<sup>1</sup>, 王作学<sup>1</sup>, 张 波<sup>2</sup>

(1. 机械传动国家重点实验室(重庆大学), 重庆 400044; 2. 中国石油西南油气田分公司(重庆气矿工艺研究所), 重庆 401147)

**摘 要:** 为实现振动系统闭环零极点的任意配置同时避免振动系统成为奇异系统, 该文提出将积分反馈引入经典动柔度振动控制方法的主动振动控制方法。首先将 PID 输入反馈引入多自由度线性系统自由振动方程, 经拉普拉斯变换, 由 Sherman-Morrison 公式得到闭环系统柔度矩阵。由于此时闭环系统为正定系统, 若预设零极点均自共轭且具有负实部, 即可由 Moore-Penrose 广义逆求得 PID 输入反馈零极点配置理论增益向量解。同时提出系统可配置极点数目、传感器及反馈增益合理配置的概念及其计算方法。最后给出数值实例以验证该理论闭环极点、零点及零极点分配的准确性及有效性。

**关键词:** 动柔度法; 主动振动控制; 积分控制; 零极点配置

中图分类号: TP273; TH113.1

文献标志码: A

文章编号: 1674-5124(2019)01-0121-07

## PID poles and zeros assignment theory in vibration system

WANG Jian<sup>1</sup>, WANG Zuoxue<sup>1</sup>, ZHANG Bo<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanical Transmission (Chongqing University), Chongqing 400044, China;

2. Petro China Southwest Oil and Gasfield Company (Chongqing Gas District), Chongqing 401147, China)

**Abstract:** In order to realize the arbitrary configuration of the closed-loop zeros and poles in vibration system and avoid the vibration system becoming a singular system, an active vibration control method that introduces integral feedback into the classical dynamic compliance vibration control method is proposed. Firstly, the PID input feedback is introduced into the multi-degree-of-freedom linear system free vibration equation. Through the Laplace transform, the closed-loop system flexibility matrix is obtained by the Sherman-Morrison formula. Since the closed-loop system is a positive definite system at this time, if the preset zeros and poles are self-conjugated and have negative real part, the theoretical gain vector solution of the PID input feedback zeros and poles configuration can be obtained from the Moore-Penrose generalized inverse. At the same time, the concept of the system configurable poles number, sensors and feedback gain reasonable configuration and its calculation method are proposed. Finally, numerical examples are given to verify the accuracy and effectiveness of the closed-loop poles, zeros and zeros-poles assignments of this theory.

**Keywords:** receptance method; active vibration control; integral control; poles and zeros assignment

收稿日期: 2018-03-09; 收到修改稿日期: 2018-04-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目面上项目 (51675064)

作者简介: 王 见 (1975-), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为测试仪器与信号处理、机电一体化技术及智能控制与计算机协同监控。

## 0 引言

由于系统的振动特性由其极点及零点值决定,因此系统的零极点特征值赋值问题是系统主动振动控制的中心研究问题之一。在传统主动振动控制问题中常通过有限元法分析系统的理论模型获得系统的质量、阻尼和刚度矩阵,进而求得极点配置问题最优解<sup>[4]</sup>。鉴于有限元法存在难以获得实际结构精确阻尼模型的缺陷,近年来 Mottershead 等<sup>[5]</sup>开发了基于柔度法的线性系统主动振动控制方法以精确分配系统极点和零点到指定数值。该方法的一个重要优点是振动控制过程完全基于模态测试数据,无需通过有限元法获取系统的精确质量、阻尼和刚度矩阵。Ghandchi Tehrani 等<sup>[6]</sup>采用输入反馈算法在使非重要极点不可控或不可观测的情况下,实现了将系统部分极点分配到预定值而保持其他极点不变的效果。Mottershead 等<sup>[7]</sup>展示了输入反馈控制零极点配置算法具有可实现传感器与作动器并置的优点。除了以上研究,许多其他类型的反馈控制也被引入到了主动振动控制中。如 Zhang 等<sup>[8]</sup>提出了将加速度反馈与位置反馈应用到无阻尼系统中实现部分极点配置;H. Ouyang<sup>[9]</sup>研究了将加速度和速度反应用于主动振动控制。从这些研究结果可以看出,目前主动振动控制零极点配置算法多使用加速度、速度和位移反馈及其各种组合来实现。然而,当系统引入加速度反馈时,振动系统不可避免地将可能变成奇异系统而导致动柔度法不可使用,为此本文引入了积分控制以避免该情况的发生;同时在保留速度控制及加速度控制基础上研究了基于动柔度法的 PID 输入反馈主动振动控制,保证了控制系统的非奇异性,拓展了主动振动控制的适用系统范围,补充了动柔度法在微分控制方面的研究。另外结合本零极点配置算法,本文提出系统可配置极点数目、最佳传感器及反馈增益配置方法的概念及其相关算法。

## 1 PID 输入反馈控制极点分配理论

### 1.1 基于动柔度法的极点分配

多自由度线性系统自由振动方程<sup>[4]</sup>一般表示为

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中  $M$  为质量矩阵;  $C$  为阻尼矩阵;  $K$  为刚度矩阵;  $x(t)$  为各自由度处位移量;  $M, C, K \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 且  $M = M^T$ ,  $C = C^T$ ,  $K = K^T$ ; 对任意非零向量  $v$ ,  $v \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ , 有  $v^T M v > 0$ ,  $v^T C v \geq 0$ ,  $v^T K v \geq 0$ 。

对上述线性系统实施单输入 PID 控制,则控制方程如下:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = bu(t) \quad (2)$$

其中  $b \in \mathbf{R}^{n \times 1}$  为作动器分布向量,  $u(t)$  为反馈控制输入:

$$u(t) = g_1^T x(t) + g_2^T \int_0^t x(\tau) d\tau + g_3^T \dot{x}(t) \quad (3)$$

式中  $g_1^T, g_2^T, g_3^T, g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ , 为相应的输入控制增益向量。

对式 (2) 进行拉普拉斯变换,得:

$$[Ms^2 + Cs + K]x(s) = b \left( g_1^T + \frac{g_2^T}{s} + sg_3^T \right) x(s) \quad (4)$$

移项得:

$$\left[ Ms^2 + Cs + K - b \left( g_1^T + \frac{g_2^T}{s} + sg_3^T \right) \right] x(s) = \mathbf{0} \quad (5)$$

从式 (5) 可知:系统刚度矩阵的最高阶  $M$  为正定矩阵,所以闭环系统一定为非奇异系统。故系统柔度矩阵存在。

对式 (5), 利用 Sherman-Morrison 公式得到闭环系统柔度矩阵为

$$\hat{H}(s) = H(s) + \frac{H(s)b \left( g_1 + \frac{g_2}{s} + sg_3 \right)^T H(s)}{1 - \left( g_1 + \frac{g_2}{s} + sg_3 \right)^T H(s)b} \quad (6)$$

其中  $H(s) = [Ms^2 + Cs + K]^{-1}$  为开环系统柔度矩阵,可在实践中通过测量  $H(i\omega)$  获得<sup>[10]</sup>。同时由 (6) 式可得闭环特征多项式  $p(s)$  为

$$p(s) = 1 - \left( g_1 + \frac{g_2}{s} + sg_3 \right)^T H(s)b \quad (7)$$

闭环系统的极点即为下式的根:

$$p(s) = 0 \quad (8)$$

因此,将闭环系统极点分配到设定值  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$  的问题即为:已知  $H(s), b$ , 令方程:

$$p(\mu_i) = 0 \quad (9)$$

求增益向量  $g_1, g_2, g_3$ 。其中  $\mu_i \in \{\mu_i\}_{i=1}^N$ ,  $\mu_i \neq 0$ ,  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  是自共轭的,  $N$  为最小可配置闭环系统极点数目。

### 1.2 最小可配置极点数目 $N$

令矩阵  $H(s)$  的伴随矩阵为  $A(s)$ , 行列式为  $d(s)$  则  $p(s) = 0$  可表示为

$$1 - \left( g_1 + \frac{g_2}{s} + sg_3 \right)^T \frac{A(s)}{d(s)} b = 0 \quad (10)$$

由于对  $\mu_i \in \{\mu_i\}_{i=1}^N$ ,  $d(\mu_i) \neq 0$ , 故式 (10) 可写为

$$sd(s) - (s\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + s^2\mathbf{g}_3)^T \mathbf{A}(s)\mathbf{b} = 0 \quad (11)$$

令:

$$q(s) = (s\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + s^2\mathbf{g}_3)^T \mathbf{A}(s)\mathbf{b} \quad (12)$$

则  $q(s)$  中  $s$  的最高阶次为  $(2n-2)+2=2n$ ,  $d(s)$  中  $s$  的最高阶次为  $2n$ , 即式 (10) 中  $s$  的最高阶次为  $2n+1$ . 因此应注意到: 由于积分控制的引入, 闭环系统会产生一个额外非零极点。故特征多项式根的数目  $N=2n+1$ 。

实际上闭环系统引入积分控制后将不再是常规系统, 而成为广义系统。则  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  中所包含的  $N$  个极点即为此广义系统的有限个可配置极点。此时, 若有: 1) 广义系统是正定系统, 2)  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  中所有极点都具有负实部; 则零极点配置后的系统为稳定系统<sup>[4]</sup>。而本方法中质量矩阵的正定性保证了闭环系统的正定性。因此在满足  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  中极点的实部为负且自共轭的情况下, 即可在满足零极点配置后系统预期静态特性的基础上任意设计广义系统的有限个可配置极点的值, 此时该系统为稳定系统。

### 1.3 求解向量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 及最少传感器布置方法

由式 (7),  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  的求解问题可写为

$$\mathbf{G}\mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma} \quad (13)$$

其中:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \psi_1^T & \frac{\psi_1^T}{\mu_1} & \mu_1\psi_1^T \\ \psi_2^T & \frac{\psi_2^T}{\mu_2} & \mu_2\psi_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_N^T & \frac{\psi_N^T}{\mu_N} & \mu_N\psi_N^T \end{bmatrix}, \psi_i = \mathbf{H}(\mu_i)\mathbf{b},$$

$$\mathbf{g}^T = [\mathbf{g}_1^T \quad \mathbf{g}_2^T \quad \mathbf{g}_3^T], \boldsymbol{\gamma}^T = [1 \quad \dots \quad 1],$$

$$\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{N \times 3n}, \mathbf{g} \in \mathbf{R}^{3n \times 1}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^{N \times 1}.$$

即针对式 (2) 所提出的极点配置问题可由式 (13) 进行求解。其中式 (13) 的一种求解实现形式为

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{G}^+ \boldsymbol{\gamma} \quad (14)$$

$\mathbf{G}^+$  为  $\mathbf{G}$  的 Moore-Penrose 广义逆。可以证明: 当闭环极点  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  自共轭时, 由式 (14) 获得的  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  为实向量<sup>[5]</sup>。

考虑到对实际系统控制时附加质量要求的限制, 用于测量系统运动参数的传感器数量应尽可能少。因此  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  中的某些项的值可通过设置  $\mathbf{G}$  相应列的值为零而变为零。此时其实际意义即为取得

使传感器布置较少的方案。但应注意的是: 由于采用 PID 输入反馈控制且  $N=2n+1$ , 因此  $\mathbf{G}$  中理论上可分配为零的列至多有  $3n-N=n-1$  列。所以应在满足该条件的基础上对传感器布置进行合理缩减, 以尽量降低附加质量对系统的影响。

### 1.4 PID 反馈振动控制方法的有效性分析

当预设极点序列  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  的数值及  $\mathbf{G}$  中被零值所取代的任选  $k (0 \leq k \leq n-1)$  列列向量被确定时, 即认为确定了一种在该确定预设极点序列  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  下的特定的 PID 输入反馈方法, 记为  $W_k$ 。由式 (14) 可获得在此 PID 输入反馈方式下  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  的具体数值。以下给出如何验证确定的某种  $W_k$  是否有效的方法:

由式 (5) 知闭环柔度矩阵  $\hat{\mathbf{H}}(s)$  可由下式得到:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \boldsymbol{\Omega}(s)^{-1} \quad (15)$$

其中,  $\boldsymbol{\Omega}(s)$  为

$$\boldsymbol{\Omega}(s) = \mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - \mathbf{b} \left( \mathbf{g}_1^T + \frac{\mathbf{g}_2^T}{s} + s\mathbf{g}_3^T \right) \quad (16)$$

验证确定的某种  $W_k$  是否有效, 根本上即为验证在该反馈方式下由式 (14) 得到的增益向量  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  是否使对任意的  $s \notin \{\mu_i\}_{i=1}^N$  闭环刚度矩阵  $\boldsymbol{\Omega}(s)$  必然为非奇异矩阵。

由此, 可以归纳验证过程为: 确定特定的输入反馈方法  $W_k$  后, 由式 (14) 可求得实数向量  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ , 将  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  代入式 (16), 并求得  $\boldsymbol{\Omega}(s)$  的行列式  $w(s)$ , 对任意  $\mu_i \notin \{\mu_i\}_{i=1}^N$ , 若  $w(\mu_i)$  为零, 则闭环系统极点不可被分配到指定极点, 称此确定的  $W_k$  方法无效。否则认为闭环系统极点可被分配到指定期望极点, 称此确定的  $W_k$  方法有效。

## 2 PID 输入反馈控制零点分配理论

### 2.1 基于动柔度法的零点分配

由于零点分配在振动控制中具有重要意义<sup>[5-7]</sup>, 因此本文给出了闭环系统零点分配方法。

由表达式 (6) 可知, 通过选择合适的增益向量  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ , 当使式 (6) 分母矩阵坐标  $(i, j)$  处的值为零时即可实现柔度  $\hat{H}_{ij}$  处的零点分配。

闭环系统  $(i, j)$  处的柔度表达式为

$$\hat{H}_{ij}(s) = \mathbf{e}_i^T \left( \mathbf{H}(s) + \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{b}(\mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{s} + s\mathbf{g}_3)^T \mathbf{H}(s)}{1 - (\mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{s} + s\mathbf{g}_3)^T \mathbf{H}(s)\mathbf{b}} \right) \mathbf{e}_j \quad (17)$$

其中  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$  为单位列向量。

因此将闭环系统柔度  $\hat{H}_{ij}$  零点分配到设定值  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$  的问题即为: 已知  $\mathbf{H}(s), \mathbf{b}, i, j$ , 令方程:

$$\mathbf{e}_i^T \left\{ \left[ 1 - \left( \mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{\xi_k} + \xi_k \mathbf{g}_3 \right)^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \right] \mathbf{H}(\xi_k) + \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \left( \mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{\xi_k} + \xi_k \mathbf{g}_3 \right)^T \mathbf{H}(\xi_k) \right\} \mathbf{e}_j = 0 \quad (18)$$

求解  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 。其中  $\xi_k \in \{\xi_i\}_{i=1}^r$ ,  $r \leq 2n-1$ ,  $r$  为可配置闭环系统极点数目。

将式(18)变形得:

$$\left[ \left( \mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{\xi_k} + \xi_k \mathbf{g}_3 \right)^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \right] \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \left( \mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{\xi_k} + \xi_k \mathbf{g}_3 \right)^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{e}_j \quad (19)$$

即:

$$H_{ij}(\xi_k) \left[ \left( \mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{\xi_k} + \xi_k \mathbf{g}_3 \right)^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \right] - \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \left( \mathbf{g}_1 + \frac{\mathbf{g}_2}{\xi_k} + \xi_k \mathbf{g}_3 \right)^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{e}_j = H_{ij}(\xi_k) \quad (20)$$

其中  $H_{ij}(s)$  为开环系统坐标  $(i, j)$  处的开环柔度值。又由于  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b}$  为常量, 故令:

$$t_k = H_{ij}(\xi_k) \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} - \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{b} \mathbf{H}(\xi_k) \mathbf{e}_j \quad (21)$$

故当将闭环系统零点分配为  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$  时可得:

$$\begin{bmatrix} t_1^T & \frac{t_1^T}{\xi_1} & \xi_1 t_1^T \\ t_2^T & \frac{t_2^T}{\xi_2} & \xi_2 t_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_r^T & \frac{t_r^T}{\xi_r} & \xi_r t_r^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ij}(\xi_1) \\ H_{ij}(\xi_2) \\ \vdots \\ H_{ij}(\xi_r) \end{pmatrix} \quad (22)$$

其中, 令:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1^T & \frac{t_1^T}{\xi_1} & \xi_1 t_1^T \\ t_2^T & \frac{t_2^T}{\xi_2} & \xi_2 t_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_r^T & \frac{t_r^T}{\xi_r} & \xi_r t_r^T \end{bmatrix} \quad (23)$$

由式(22)可知当预设零点  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$  闭环共轭时可取得矩阵  $\mathbf{T}$  的逆, 进而得到实向量  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ <sup>[5]</sup>。特别地, 当坐标  $i, j$  重合时, 此时零点分配将影响系统的闭环极点配置, 因此具有重要意义<sup>[12]</sup>。

## 2.2 基于动柔度法的零极点分配

工程应用中, 有时需要同时对零点与极点进行

分配, 结合式(13)与式(22)可对闭环系统同时进行零极点分配, 此时应注意零极点分配总数目  $r+N \leq 2n+1$ 。同样地此时也可以对式(13)与式(25)中  $\mathbf{G}$  与  $\mathbf{T}$  矩阵选取  $k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) 列进行零向量代换, 以得到最佳的传感器分配方案。

## 3 数值实例

### 3.1 极点分配数值实例

为验证上述理论, 考虑如下三自由度阻尼-质量-弹簧系统进行数值仿真:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2.5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

则可得系统开环系统极点:  $-0.030 \ 5 \pm 0.589 \ 4i$ ,  $-0.850 \ 3 \pm 1.011 \ 9i$ ,  $-0.660 \ 9 \pm 2.120 \ 0i$ 。

现用本文所提出的理论对系统极点进行配置, 以改善系统闭环响应。设  $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1]^T$ 。由于  $n=3$ , 则由 1.2 节可知  $N=7$ 。由于原始系统特征频率较低阻尼较小, 因此设置一组闭环系统特征值为  $\mu_{1,2} = -1 \pm 0.5i$ ,  $\mu_{3,4} = -1 \pm i$ ,  $\mu_{5,6} = -2 \pm i$ ,  $\mu_7 = -3$ , 增大系统阻尼并增强系统稳定性。

由式(15)可得  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  为

$$\mathbf{g}_1 = [-38.181 \ 7 \quad -6.781 \ 0 \quad 11.376 \ 5]^T$$

$$\mathbf{g}_2 = [3.739 \ 6 \quad -14.448 \ 7 \quad 2.420 \ 3]^T$$

$$\mathbf{g}_3 = [-4.135 \ 7 \quad -4.590 \ 4 \quad -10.660 \ 8]^T$$

同时经 1.4 中验证方法验证知: 系统可配置闭环系统极点可被  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  分配到指定极点  $\mu_{1,2} = -1 \pm 0.5i$ ,  $\mu_{3,4} = -1 \pm i$ ,  $\mu_{5,6} = -2 \pm i$ ,  $\mu_7 = -3$ 。

为突出极点分配效果, 给出原系统及修改后系统  $H_{33}$  处的频率响应曲线、零极点分布图及奈奎斯特图如图 1~图 5 所示。由图 3 及图 2 对比可知系统极点被分配到了预设位置。且由于积分反馈的引入, 修改后系统增加了一个闭环极点。在工程实际中此极点的引入增加了配置闭环系统极点值的灵活性。结合图 1、图 4、图 5 可看出系统极点重分配后闭环系统的特征频率增大, 阻尼增大, 系统稳定性增强, 系统固有特性得到改变。

### 3.2 传感器合理配置数值实例

在 3.1 节极点分配的基础上, 可利用 1.3 节末尾的方法来寻找本例的最少传感器布置方案, 并用 1.4 节的方法进行验证。表 1 给出了可将 3.1 节所



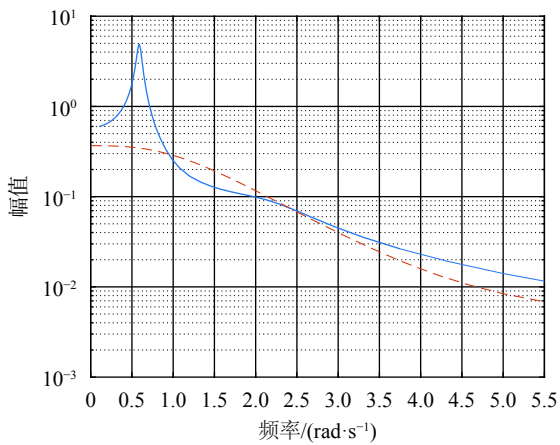


图 1 原系统  $H_{33}$  (实线) 及修改系统  $H_{33}$  (虚线) 频率响应

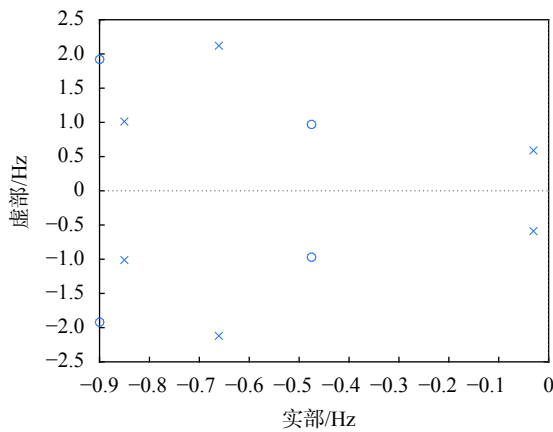


图 2 原系统  $H_{33}$  零极点分布

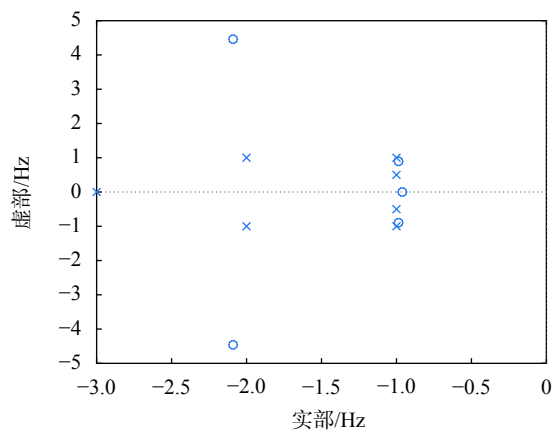


图 3 修改系统  $H_{33}$  零极点分布

示系统极点分配至  $\mu_{1,2} = -1 \pm 0.5i$ ,  $\mu_{3,4} = -1 \pm i$ ,  $\mu_{5,6} = -2 \pm i$ ,  $\mu_7 = -3$ , 且保持闭环系统稳定的所有替代方案。并在表 2 中给出部分替代方案的 PID 反馈增益值 (此处给出每类第 1 种方法的控制增益)。由于篇幅限制不再验证更高阶系统, 但发现当系统为更高阶的系统时, 在保证  $G$  行满秩的情况下设置  $G$  中某些列为零向量, 发现得到的反馈增益向量  $g_1$ ,

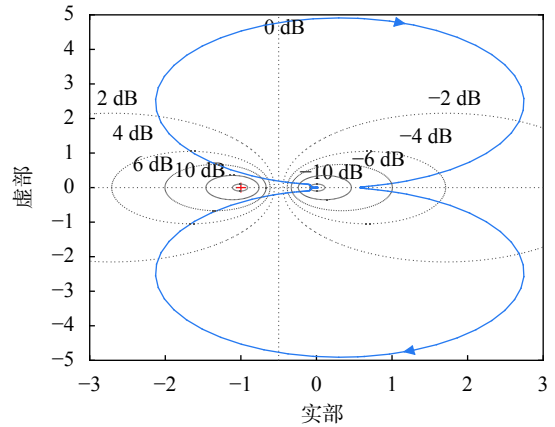


图 4 原系统  $H_{33}$  奈奎斯特曲线

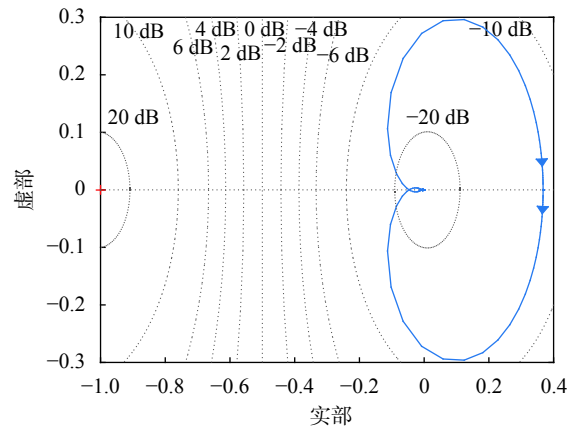


图 5 修改系统  $H_{33}$  奈奎斯特曲线

表 1 可将闭环极点配置于指定位置的方案

方法	$G$ 中零向量所替换的列
$W_1$	{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}
$W_2$	{1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,4}, {2,4}, {3,4}, {1,5}, {2,5}, {3,5}, {4,5}, {1,6}, {2,6}, {3,6}, {4,6}, {5,6}, {1,7}, {2,7}, {3,7}, {4,7}, {5,7}, {6,7}, {1,8}, {2,8}, {3,8}, {4,8}, {5,8}, {6,8}, {7,8}, {1,9}, {2,9}, {3,9}, {4,9}, {5,9}, {6,9}, {7,9}, {8,9}

表 2 表 1 方案所对应控制增益

方法	控制增益
$W_1$	$g_1 = [0 \quad -64.649 \quad 9 \quad 33.375 \quad 5]^T$ $g_2 = [55.159 \quad 0 \quad -68.253 \quad 5 \quad 18.766]^T$ $g_3 = [5.111 \quad 5 \quad -31.213 \quad 1 \quad 15.402 \quad 3]^T$
$W_2$	$g_1 = [0 \quad 0 \quad -23.193 \quad 1]^T$ $g_2 = [301.636 \quad 7 \quad -56.131 \quad 7 \quad -191.435 \quad 6]^T$ $g_3 = [37.436 \quad 5 \quad 9.193 \quad 1 \quad -93.694 \quad 4]^T$

$g_2, g_3$  并不全都可将系统闭环极点分配到指定位置, 这表明了 1.4 节所给验证方法的重要性, 本文不再给出示例。

进一步对系统作缺少极点分配计算 (表 3 所示

表3 缺少极点的分配

预设极点序列	反馈增益向量	实际极点
$\{\mu_i\}_{i=1}^{2n} = \begin{Bmatrix} -1 \pm 0.5i \\ -1 \pm i \\ -2 \pm i \end{Bmatrix}$	$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= [-8.845 \ 5 \ 0.998 \ 7 \ 11.564 \ 6]^T \\ \mathbf{g}_2 &= [4.907 \ 5 \ 1.194 \ 8 \ -1.561 \ 9]^T \\ \mathbf{g}_3 &= [-13.096 \ 3 \ 1.724 \ 8 \ 5.581 \ 9]^T \end{aligned}$	$\begin{Bmatrix} -1 \pm 0.5i \\ -1 \pm i \\ -2 \pm i \\ 1.091 \ 5 \end{Bmatrix}$

分配缺陷极点数为 $2n$ )表明:当分配极点数目小于 $N$ 时(即分配缺少极点的情况时),系统闭环极点将会出现使系统不稳定的极点。这表明了确定分配极点数目的重要性。

### 3.3 零点分配数值实例

基于3.1中三自由度阻尼-质量-弹簧系统,设 $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1]^T$ 并预设闭环系统柔度 $H_{33}(s)$ 处的零点为 $\xi_{1,2} = -1 \pm 0.5i$ ,  $\xi_{3,4} = -2 \pm 0.5i$ 。使用第2节所述方法对系统零点进行分配:

由式(22)可得此时 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= [1.962 \ 3 \ -3.044 \ 8 \ 0]^T \\ \mathbf{g}_2 &= [-1.321 \ 5 \ -0.491 \ 2 \ 0]^T \\ \mathbf{g}_3 &= [-6.379 \ 1 \ -1.468 \ 2 \ 0]^T \end{aligned}$$

同时计算此时闭环极点为: $-0.143 \ 9 \pm 0.504 \ 7i$ ,  $-0.619 \ 5 \pm 1.682 \ 4i$ ,  $-1.019 \ 9 \pm 0.952 \ 2i$ ,  $-3.440 \ 4$ 。极点均分布于虚轴左半平面,闭环系统稳定。同样给出修改后系统 $H_{33}$ 处的频率响应曲线、零极点分布图及奈奎斯特图如图6~图8所示。由图7及图2对比可知系统零点被准确地分配至预设值。结合图6、图4、图8可看出重分配零点后,系统稳定性增强。证实了方法的有效性。

### 3.4 零极点分配数值实例

考虑例3.1中三自由度阻尼-质量-弹簧系统,设 $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1]^T$ 并预设部分闭环系统柔度 $H_{33}(s)$

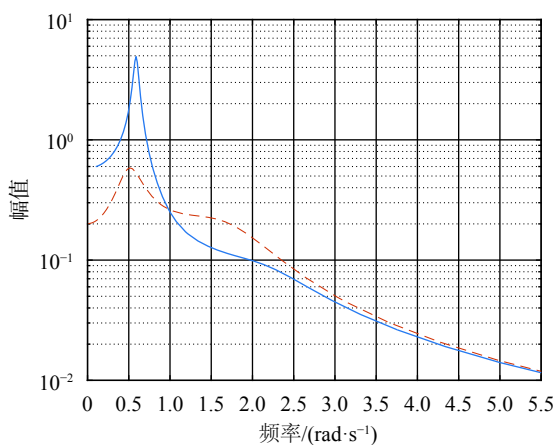


图6 原系统 $H_{33}$ (实线)及修改系统 $H_{33}$ (虚线)频率响应

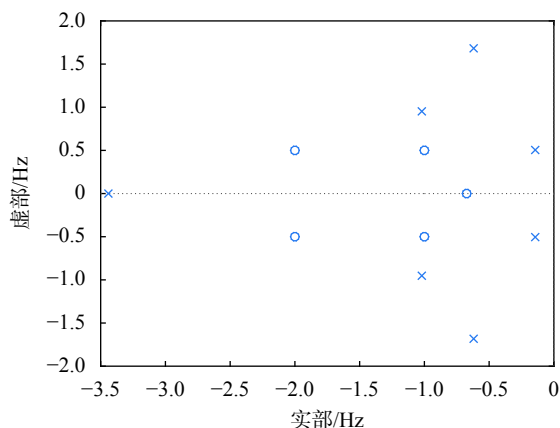


图7 修改系统 $H_{33}$ 零极点分布

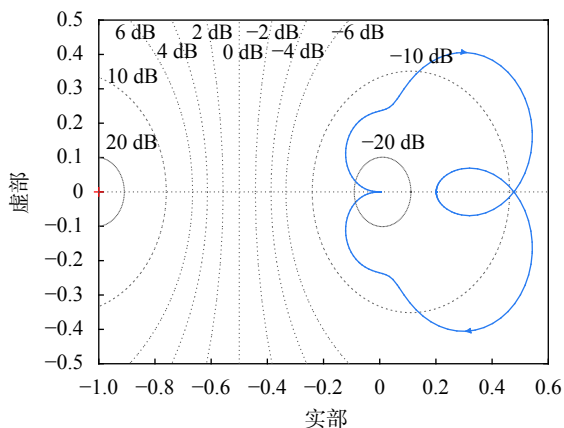


图8 修改系统 $H_{33}$ 奈奎斯特曲线

处的零点 $\xi_{1,2} = -1 \pm 0.5i$ , 闭环系统极点为 $\mu_{1,2} = -1 \pm 0.5i$ 。

联合式(14)及式(22)可得此时 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= [1.962 \ 3 \ -3.044 \ 8 \ 0]^T \\ \mathbf{g}_2 &= [-1.321 \ 5 \ -0.491 \ 2 \ 0]^T \\ \mathbf{g}_3 &= [-6.379 \ 1 \ -1.468 \ 2 \ 0]^T \end{aligned}$$

计算此时闭环极点为: $-0.356 \ 3 \pm 1.621 \ 3i$ ,  $-0.977 \ 8 \pm 0.976 \ 9i$ ,  $-1 \pm 0.5i$ ,  $-3$ , 均分布于虚轴左半平面,闭环系统稳定。修改后系统 $H_{33}$ 处的频率响应曲线、零极点分布图及奈奎斯特图如图9~图11所示。由图10及图2对比可知系统极点与零点被准确地分配至预设值。结合图9、图4、图11可看出重分配零点后,系统稳定性增强。证实了方法的有效性。

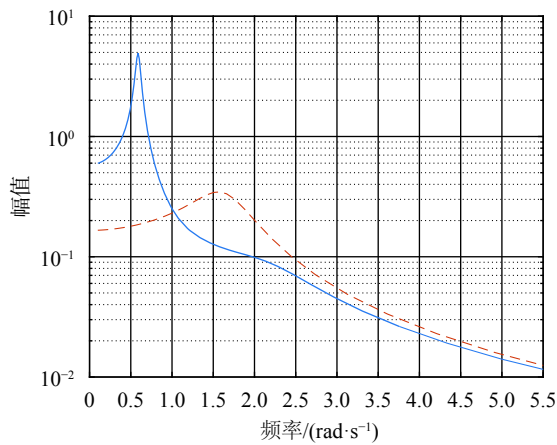


图 9 原系统  $H_{33}$  (实线) 及修改系统  $H_{33}$  (虚线) 频率响应

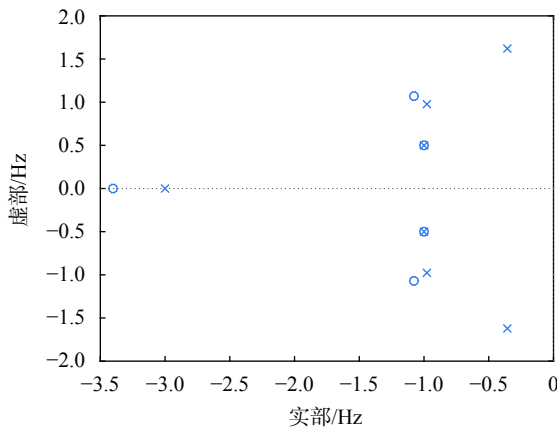


图 10 修改系统  $H_{33}$  零极点分布

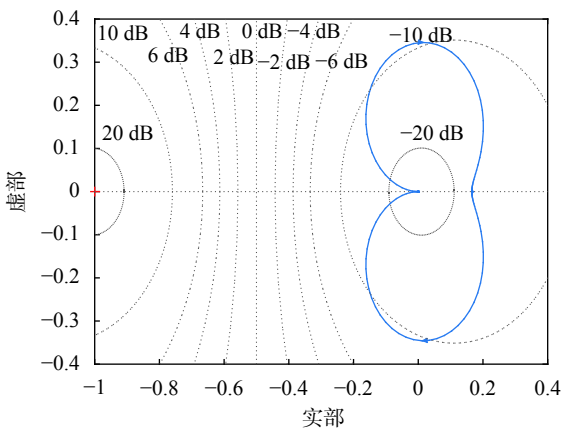


图 11 修改系统  $H_{33}$  奈奎斯特曲线

#### 4 结束语

本文通过理论推导得到了基于动柔度法的 PID 主动振动控制零极点配置算法。本方法用于闭环系统极点及零点的分配, 以获得良好的阻尼比及模态频率。修改后的闭环系统固有特性得到控制及改善, 从而可以在工作频率段达到避振的控制效果。另外该方法由于引入了积分控制, 从而避免了

系统成为非奇异系统保证了系统的正定性并拓展了动柔度法的应用范围。同时提出确定可配置闭环极点数目的重要性及计算方法, 并讨论了缺少极点分配的情况。最后讨论了选择性分配反馈增益的方法, 为后文在实践中获取最佳的反馈控制方案做了初步探索。

#### 参考文献

- [1] BAUOMY H S. Active vibration control of a dynamical system via negative linear velocity feedback[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(1-2): 1-11.
- [2] JIFFRI S, LI D, XIANG J, et al. Feedback linearisation of nonlinear vibration problems: A new formulation by the method of receptances[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2018, 98: 1056-68.
- [3] WEI X J. Active vibration control in linear time-invariant and nonlinear systems[D]. Liverpool: University of Liverpool, 2015.
- [4] WEI X, MOTTERSHEAD J E. Block-decoupling vibration control using eigenstructure assignment[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2016, 74: 11-28.
- [5] RAM Y M, MOTTERSHEAD J E. Receptance method in active vibration control[J]. Aiaa Journal, 2006, 45(3): 562-567.
- [6] MOTTERSHEAD J E, TEHRANI M G, RAM Y M. Assignment of eigenvalue sensitivities from receptance measurements[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2009, 23(6): 1931-9.
- [7] MOTTERSHEAD J E, TEHRANI M G, JAMES S, et al. Active vibration suppression by pole-zero placement using measured receptances[J]. Journal of Sound & Vibration, 2008, 311(3-5): 1391-408.
- [8] ZHANG J, OUYANG H, YANG J. Partial eigenstructure assignment for undamped vibration systems using acceleration and displacement feedback[J]. Journal of Sound & Vibration, 2014, 333(1): 1-12.
- [9] OUYANG H. Pole assignment of friction-induced vibration for stabilisation through state-feedback control[J]. Journal of Sound & Vibration, 2010, 329(11): 1985-91.
- [10] SAMIN R, TEHRANI M G, MOTTERSHEAD J E. Active vibration suppression by the receptance method: partial pole placement, robustness and experiments[C]//Vibration Problems ICOVP 2011, Springer Proceedings in Physics. Dordrecht: Springer, 2011.
- [11] ISHIHARA J Y, TERRA M H. On the Lyapunov theorem for singular systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(11): 1926-30.
- [12] RAM Y M. Pole-zero assignment of vibratory systems by state feedback control[J]. Journal of Vibration & Control, 1998, 4(2): 145-65.